ANALİZ II
YAZ OKULU FİNAL SINAVI

SORULAR

1) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$ olduğunu gösteriniz

2) $y = \dfrac{x^2}{4}$ ve $y = \dfrac{x}{2} + 2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

3) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+2x+x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$

4) Aşağıda verilen dizinin genel terimini yazınız. Yakınsak olup olmadığını belirleyiniz. Eğer yakınsaksa limit değerini bulunuz.

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{9},\ \ldots$$

5) Aşağıdaki serileri $n=1$'den başlayacak şekilde yeniden düzenleyiniz ve yakınsaklıklarını inceleyiniz.

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} 1 - \frac{2}{(n-2)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+5}\right)^{n+1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{(n-1)+\ln n}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $x=-1$ noktasında şartlı yakınsak olduğuna göre, serinin yakınsaklık yarıçapı nedir? Açıklayınız.

7) $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$ fonksiyonunu için kuvvet serisi açılımı yazınız, ve fonksiyonun bu kuvvet serisiyle temsil edildiği aralığı belirleyiniz.

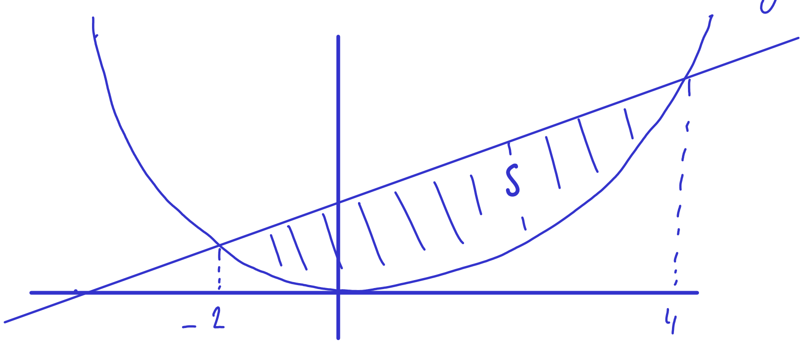
1) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{t\to\infty} \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^t = \lim_{t\to\infty}\Big(\underbrace{-\frac{1}{\ln t}}_{\to 0} + \frac{1}{\ln 2}\Big) = \frac{1}{\ln 2}$$

2) $\dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x}{2} + 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x+2)(x-4) = 0$

$\therefore\ x = -2$ veya $x = 4$



$$S = \int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{4} + 2x - \frac{x^3}{12}\Big|_{-2}^{4}$$

$$= 4 + 8 - \frac{64}{12} - \left[1 - 4 + \frac{8}{12}\right]$$

$$= 9$$

3) a) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x(x+1)^2}\,dx$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A = x^2+1$$

$A = 1,\ B = 0,\ C = -2$

$$\therefore \int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2}\right) dx$$

$$= \ln|x| + \frac{2}{x+1} + C$$

b) $$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = I$$

$$\left.\begin{array}{l} x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{array}\right\} \Rightarrow I = \int \frac{(1-u)\,2u\,du}{1+u} = -2\int \frac{u^2-u}{u+1}\,du$$

$$\left.\begin{array}{l|l} u^2-u & u+1 \\ \cline{2-2} -u^2-u & u-2 \\ \cline{1-1} -2u & \\ 2u+2 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}\right\} \Rightarrow I = -2 \int u - 2 + \frac{2}{u+1}\, du$$

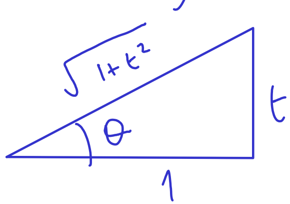
$$= -2\left[\frac{u^2}{2} - 2u + 2\ln|u+1|\right] + C$$

$$\overset{x=u^2}{=} -2\left[\frac{x}{2} - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x}+1)\right] + C$$

$$= 4\sqrt{x} - x - 4\ln(\sqrt{x}+1) + C$$

c) $$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2}} = I$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2x-1}{2} = t \\ dx = dt \end{array}\right\} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$



$$\left.\begin{array}{l} t = \tan\theta \\ dt = \sec^2\theta\, d\theta \\ \sqrt{1+t^2} = \sec\theta \end{array}\right\} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$\frac{1}{2}\int \sec\theta d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{(\sec\theta+\tan\theta)} d\theta$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \sec\theta+\tan\theta \\ du &= (\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta)\,d\theta \\ &= \sec\theta(\tan\theta+\sec\theta)\,d\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$\frac{1}{2}\ln|u|+C = \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+t^2}+t\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2} + \left(\frac{2x-1}{2}\right)\right| + C$$

(4) Dizinin genel terimi : $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$

Dizi yakınsaktır ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = 1/2$

(5) a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{(n-2)^2}\right) = 1 \neq 0$ olduğundan seri ıraksak

$$\sum_{n=3}^{\infty} 1-\frac{2}{(n-2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)$$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+5}\right)^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n}$

kök testi : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2} = 2/3 = L$

$L < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$

$f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$ fonk. $(0,\infty)$ da pozitif değerli ve azalan

integral testi: $t_n=\int_2^n \frac{dx}{x\ln^2 x}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} t_n$ varsa $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} t_n=\lim_{n\to\infty}\int_2^n \frac{dx}{x\ln^2 x} \overset{1.\text{soru}}{=\!=} \frac{1}{\ln 2}$$

olduğundan seri yakınsaktır.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$$

d) $\frac{2}{(n-1)+\ln n}$ azalan ve $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)+\ln n}=0$ olduğundan Leibniz testine göre seri yakınsaktır.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(n-1)+\ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n+\ln(n+1)}$$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı $r > 0$ ise seri $(-r, r)$ aralığında mutlak yakınsak ve $\mathbb{R} - [-r, r]$ 'de ıraksaktır. O halde serinin şartlı yakınsak olabileceği noktalar $-r$ ve r dir. Seri -1 'de şartlı yak. olduğuna göre ve $r > 0$ olduğuna göre

$$-r = -1 \Rightarrow r = 1$$ elde edilir.

7) $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$ kuvvet serisi için, $|3x| < 1$ ya da $|x| < 1/3$ ise, $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \frac{1}{1-3x}$ sağlanır. Buna göre $f(x)$ fonksiyonu $(-1/3, 1/3)$ aralığında

$$f(x) = \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$$

özdeşliğini sağlar.