

KODLAMA TEORİSİ ÖDEVLER

- ① p olasılıklı bir BSC kanalında
3 uzunluklu $C = \{000, 111\}$ 2-likodunu alalım (bu tür kodlara tekrar kodu denir). Buna göre, 010, 001, 100, 000 kelimeleri ulaşması halinde, 000 olarak gözüktür. Buna göre ulaşan kelimenin 000 kod kelimesine gözüktürme olasılığı
$$(1-p)^3 + 3p(1-p)^2 = (1-p)^2(1+2p)$$
dir. Simetriden dolayı 111 kod kelimesine gözüktürme olasılığı da aynı olacaktır. O halde, herhangi bir kod kelimenin kullanıcıya hatalı iletilme olasılığı
$$P_{\text{hata}}(C) = 1 - (1-p)^2(1+2p) = 3p^2 - 2p^3$$
dir. $P_{\text{hata}}(C)$, iletilen kod kelimedenden bağımsızdır. Bu yüzden "kelime hata olasılığı" adı verilir.

Bir ikili simetrik kanalda beş uzunluklu bir $C = \{00000, 11111\}$ ikili tekrar kodu kullanılmaktadır. Gösteriniz ki bu kodun kelime hata olasılığı $10p^3 - 15p^4 + 6p^5$ tir.

- ② Gösteriniz ki, minimum uzaklığı 4 olan bir kod tek bir hatayı düzeltebilir ve iki hatayı bulabilir.

- ④ (i) Gösteriniz ki, bir $(3, M, 2)$ -üçlü kodu için $M \leq 9$ dur.

(Not burada (n, M, d) parametreleri için n , kod kelimelerin uzunluğunu; M , kodun ebadını; d ise, kodun minimum uzaklığını gösterilmektedir)

- (ii) Gösteriniz ki, bir $(3, 9, 2)$ -üçlü kodu vardır.

- (iii) Önceki iki şıkta elde edilen sonuçları $q \geq 2$ olmak üzere, herhangi bir q -lu $(3, M, 2)$ -kodu için genelleştiriniz.

- ⑤ Diyelim ki H , \mathbb{F}_q cismi üzerinde bir $r \times n$ matris olsun. Gösteriniz ki,

$$C = \{v \in \mathbb{F}_q^n : vH^T = 0\}$$

\mathbb{F}_q üzerinde bir doğrusal koddur.

- ⑥ Gösteriniz ki, \mathbb{F}_2^n deki ağırlıkları çift olan vektörlerden oluşan E_n kümesi, \mathbb{F}_2 üzerinde bir doğrusal koddur.

7) Gösteriniz ki, bir 2-li doğrusal kodun, ya tüm kod kelimelerinin ağırlığı çift sayıdır; ya da yarısının ki tek, yarısının ki çift sayıdır.

8) Diyelim ki, C_1 ve C_2 2-li kodların üreteç matrisleri, sırasıyla

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \vee \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun.

(a) C_1 ve C_2 kodlarının parite kontrol matrislerini yazınız

(b) C_1 ve C_2 kodlarını açık bir şekilde yazmadan, parite kontrol matrisi yardımıyla, kodların minimum uzaklıklarını bulunuz.

9) Diyelim ki, bir C 2-li kodunun üreteç matrisi

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun.

(a) G' 'yi standart biçimde yazınız

(b) C' kodunun üreteç matrisi

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Buna göre C ile C' kodları denk midir?