

①

① Aşağıdaki her bir şıkta verilen kümelerin, verilen  $\mathbb{F}_q$  sonlu cismi üzerinde vektör uzayı olup olmadıklarını belirleyiniz. Eğer vektör uzayıysa, sahip olabileceği farklı bazların sayısını bulunuz.

(a)  $q=2$ ,  $S = \{0, b, c, d, e\} : a+b+c+d+e=1\}$

(b)  $q=3$ ,  $T = \{(x, y, z, w) : xyzw=0\}$

(c)  $q=5$ ,  $U = \{(\lambda+\mu, 2\mu, 3\lambda+\nu, \nu) : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{F}_5\}$

(d)  $q$  asal sayı,  $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 - x_3\}$

② (a) Diyelim ki,  $\mathbb{F}_q$  sonlu cismi,  $\mathbb{F}_r$  sonlu cisminin bir alt cismi olsun. Gösterin ki  $\mathbb{F}_r$ ,  $\mathbb{F}_q$  üzerinde bir vektör uzayıdır. Burada vektör toplama ve skaler çarpma,  $\mathbb{F}_r$ 'nin elemanlarının toplama ve çarpma ile aynıdır.

(b) Diyelim ki  $\alpha$ ,  $\mathbb{F}_q$  üzerinde derecesi  $n$  olan monik, indirgenemez bir polinomun köklerinden biri olsun. Gösteriniz ki  $\{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$   $\mathbb{F}_q^n$ 'nin  $\mathbb{F}_q$  üzerinde bir bazıdır.

③ Diyelim ki  $V$  bir  $\mathbb{F}_q$ -vektör uzayı olsun ve  $V$ 'nin bir  $\mathbb{F}_q$ -bazı  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  verilsin. Gösteriniz ki, aşağıdaki iki durum birbirine denktir.

(i) Her  $v, v' \in V$  için  $v \cdot v' = 0$  ;

(ii) Her  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  için  $v_i \cdot v_j = 0$  .

(Not: Bu gösterir ki, verilen bir doğrusal kodun kendi-dikkey olduğuna belirlemek için (ii)'nin sağlandığını göstermek yeterlidir).

④ Diyelim ki  $\mathbb{F}_2$  bir sonlu cisim,  $S$  de  $\mathbb{F}_2^n$ 'nin bir alt-uzayı olsun.

(a) Gösterin ki  $S^\perp$  ve  $\langle S \rangle^\perp$   $\mathbb{F}_2^n$ 'nin alt-uzaylarıdır;

(b) Gösterin ki  $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$  dir.

(2)

⑤ Aşağıdaki her bir  $S$  kümesi ve karşılık gelen  $\mathbb{F}_q$  sonlu cisimleri için,  $\langle S \rangle$  'yi ve diğer tümleri  $S^+$  'yi hesaplayınız:

(a)  $S = \{101, 111, 010\}$ ,  $q=2$

(b)  $S = \{1020, 0201, 2001\}$ ,  $q=3$

(c)  $S = \{00101, 10001, 11011\}$ ,  $q=2$

⑥ Aşağıdaki kodlardan hangilerinin  $\mathbb{F}_q$  cisim üzerinde doğrusal olduklarını belirtiniz:

(a)  $q=2$  ve  $C = \{1101, 1110, 1011, 1111\}$

(b)  $q=3$  ve  $C = \{0000, 1001, 0110, 2002, 1111, 0220, 1221, 2112, 2222\}$

(c)  $q=2$  ve  $C = \{00000, 11110, 01111, 10001\}$

⑦ (i) Diyelim ki  $x, y \in \mathbb{F}_2^n$  olsun. Eğer  $x$  ve  $y$  'nin ağırlıklarının her ikisi birden tek veya her ikisi birden çift ise, gösteriniz ki  $x+y$  'nin ağırlığı çift olmalıdır.

(ii) Diyelim ki  $x, y \in \mathbb{F}_2^n$  olsun. Eğer  $x, y$  den birinin ağırlığı çift diğersininki tek ise  $x+y$  'nin ağırlığı tek olmalıdır.

(iii) (i) ve (ii) 'yi kullanarak, gösteriniz ki, verilen bir  $C$  ikili doğrusal kod için, tüm kod-sözcüklerin ağırlığı çifttir ya da kod-sözcüklerin tam yarısı çifttir.

⑧ Diyelim ki  $C$ , parametreleri  $[n, k, d]$  olan bir ikili kod olsun.

Farz edelim ki  $C$  'nin en az bir tane ağırlığı tek sayı olan kod-sözcüğü bulunsun. Diyelim ki,  $C$  'nin  $C$  alt-kümesi  $C'$  'deki tüm uzunluğu çift olan kod-sözcüklerden oluşsun.

(2)

Gösteriniz ki  $C'$ , parametreleri  $[n, k-1, d']$  olan bir ikili koddur; öyle ki eğer  $d$  tek-sayıysa  $d' > d$ , eğer  $d$  çift-sayıysa  $d' = d$  dir.