MSGSÜ
Mat315
Bütünleme
17.08.2018
Süre: 75 dk.

İsim: ______________________
No: ______________________

Sınavda toplam 80 puanlık 4 soru var.

Soru	1	2	3	4	Toplam
Puan	15	15	20	30	80
Kazanılan					

1. (15 Puan) Eğer I ile J bir R halkasının idealleri ise, $I \cup J$'nin R halkasının bir ideali olamayabileceğini bir örnek vererek açıklayınız.

$R = \mathbb{Z}$, $I = 2\mathbb{Z}$, $J = 3\mathbb{Z}$ olsun

$2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$'nin ideali değildir. Çünkü $2, 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ olmasına rağmen $2+3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ 'dir.

2. (15 Puan) Diyelim ki D bir tamlık bölgesi olsun. Verilen $a, b \in D$ için gösterin ki, a ile b 'nin bağdaşık olması için gerek ve yeter koşul, $a|b$ ve $b|a$ olmasıdır.

Diyelim ki a ile b bağdaşık olsun. O zaman $a = ub$ olacak şekilde bir $u \in U(D)$ vardır. Bu da $b|a$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan $u \in U(D)$ olması neticesinde $u'u = uu' = 1$ olacak şekilde bir $u' \in U$ mevcuttur. Buradan da $u'a = u'(ub) = (u'u)b = b$ elde edilir. Bu nedenle de $a|b$ dir.

Şimdi de $a|b$ ve $b|a$ olsun. O zaman $u, v \in D$ vardır, öyle ki $b = au$, $a = bv$ dir. Buradan $b = au = b(vu)$ elde edilir. Bu da $v \cdot u = uv = 1$ demektir. Öyleyse a ile b bağdaşıktır.

3. (20 Puan) Diyelim ki, D sayısı *tam-kare olmayan* bir pozitif tamsayı olsun. Reel sayılar cismi $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}(\sqrt{D}) := \{a + b\sqrt{D} \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ alt-kümesini alalım. Aşağıdaki adımları izleyerek gösterin ki, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, reel sayılar cismi $\mathbb{R}$'nin bir alt-cismidir.

   i. İkisi birden sıfır olmayan a, b rasyonel sayıları için $(a + b\sqrt{D})(a - b\sqrt{D}) = a^2 - b^2D \neq 0$ olduğunu gösterin;

   ii. Her $\alpha = a + b\sqrt{D}$, $\beta = c + d\sqrt{D}$ için, $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ve $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ olduğunu gösterin.

   iii. Her $0 \neq \alpha = a + b\sqrt{D} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ için $\alpha \in U(\mathbb{Q}(\sqrt{D}))$ olduğunu gösterin (a şıkkından faydalanın).

(i) Diyelim ki $a^2 - b^2 D = 0$ olsun.

$a = 0, b \neq 0$ ise: $-b^2 D = 0$ olur. Bu da $b = 0$ demektir.

Demek ki $a = 0, b \neq 0$ için $a^2 - b^2 D = 0$ olmaz.

$a \neq 0, b = 0$ ise: $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ olur. Demek ki

$a \neq 0, b = 0$ için de $a^2 - b^2 D = 0$ olmaz

$a \neq 0, b \neq 0$ ise $a^2 = b^2 D \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = D$ olur.

Fakat D tamkare olmadığı için bu mümkün değildir.

(ii) $(a + b\sqrt{D}) - (c + d\sqrt{D}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{D} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$

$(a + b\sqrt{D})(c + d\sqrt{D}) = (ac + bd \cdot D) + (ad + bc)\sqrt{D} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$

sağlanır.

(iii) $0 \neq \alpha = a + b\sqrt{D}$ için

$(a + b\sqrt{D})(a - b\sqrt{D}) = a^2 - b^2 D$ eşitliğinden $a^2 - b^2 D \neq 0$ olduğu için

$(a + b\sqrt{D}) \dfrac{(a - b\sqrt{D})}{a^2 - b^2 D} = 1$ elde edilir.

$\dfrac{a - b\sqrt{D}}{a^2 - b^2 D} = \left(\dfrac{a}{a^2 - b^2 D}\right) - \left(\dfrac{b}{a^2 - b^2 D}\right)\sqrt{D} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ olduğundan $\alpha \in U(\mathbb{Q}(\sqrt{D}))$ dir.

(b) Aşağıdaki adımları izleyerek $\varphi_{\sqrt{2}}(\mathbb{Q}[x]) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olduğunu gösterin.

i. Gösterin ki, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \varphi_{\sqrt{2}}(\mathbb{Q}[x])$'dir;

ii. Herhangi bir $\alpha \in \varphi_{\sqrt{2}}(\mathbb{Q}[x])$ için, $\alpha = a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{2}^2 + \cdots + a_n\sqrt{2}^n$ biçimindedir. Bundan faydalanarak n'nin teklik ve çiftlik durumlarının her ikisi için de, $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olduğunu gösterin ve böylece $\varphi_{\sqrt{2}}(\mathbb{Q}[x]) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sonucuna ulaşın.

(i) Herhangi bir $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$'ye karşılık,

$a+bx \in \mathbb{Q}[x]$ için

$\varphi_{\sqrt{2}}(a+bx) = a+b\sqrt{2}$ dir. Bu da $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \varphi_{\sqrt{2}}(\mathbb{Q}[x])$

olduğu anlamına gelir.

(ii) Bir $\alpha = a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2(\sqrt{2})^2 + \cdots + a_n(\sqrt{2})^n$ alalım $(a_n \neq 0)$

n çiftse $\alpha = (a_0 + a_2 2^{2/2} + a_4 2^{4/2} + \cdots + a_n 2^{n/2}) + (a_1 + a_3 2^{2/2} + a_5 2^{4/2} + a_7 2^{6/2} + \cdots$
$+ a_{n-1} 2^{n-2/2})\sqrt{2}$
$\in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

sağlanır

n tekse: $\sqrt{2}\alpha = a_0\sqrt{2} + a_1(\sqrt{2})^2 + \cdots + a_n(\sqrt{2})^{n+1}$ olur.

$n+1$ çift olduğundan $\sqrt{2}\alpha = A + B\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$'dir.

Buradan $2\alpha = \sqrt{2}(\sqrt{2}\alpha) = \sqrt{2}A + 2B$

$\alpha = B + \frac{A}{2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ elde edilir.

Öyleyse $\varphi_{\sqrt{2}}(\mathbb{Q}[x]) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ dir. Böylece

$\varphi_{\sqrt{2}}(\mathbb{Q}[x]) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sağlanır.

(*) Alternatif çözüm: x^2-2, $\mathbb{Q}[x]$'te indirgenemez olduğundan $\langle x^2-2\rangle \trianglelefteq \mathbb{Q}[x]$ maksimal idealdir. Bu nedenle $x^2-2 \in$ çek$(\varphi_{\sqrt{2}})$ olması nedeniyle $\langle x^2-2\rangle \subseteq$ çek$(\varphi_{\sqrt{2}}) \subseteq \mathbb{Q}[x]$ olduğundan $\langle x^2-2\rangle =$ çek$(\varphi_{\sqrt{2}})$ veya çek$(\varphi_{\sqrt{2}}) = \mathbb{Q}[x]$ olmalıdır. Ama çek$(\varphi_{\sqrt{2}}) \neq \mathbb{Q}[x]$'tir (sıfırdan farklı sabit polinomlar elemanı değil)

Bu yüzden çek$(\varphi_{\sqrt{2}}) = \langle x^2-2\rangle$ dir.

4. (30 Puan) $\varphi_{\sqrt{2}} : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ halka homomorfizması, her $f(x) \in \mathbb{Z}(x)$ için $\varphi_{\sqrt{2}}(f(x)) = f(\sqrt{2})$ ile tanımlı homomorfizma olsun.

(a) Aşağıdaki adımları izleyerek çek$(\varphi_{\sqrt{2}}) =< x^2 - 2 >$ olduğunu gösterin.

i. İndirgenemezlik kriterleri yardımıyla $x^2 - 2$'nin $\mathbb{Q}[x]$'te indirgenemez olduğunu gösterin;

ii. $x^2 - 2 \in$ çek$(\varphi_{\sqrt{2}})$ olduğunu gösterin;

iii. $\mathbb{Q}[x]$ esas idealler halkası olduğu için çek$(\varphi_{\sqrt{2}}) =< p(x) >$ koşulunu sağlayan bir $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomu vardır. Gösterin ki, $x^2 - 2$ ile $p(x)$ bağdaşıktır. Bu da $< p(x) >=< x^2 - 2 >$ olduğunu gösterir.

(i) Eisenstein kriterine göre x^2-2 $\mathbb{Z}[x]$'te indirgenemezdir. Dolayısıyla Gauss lemması'ndan dolayı $\mathbb{Q}[x]$'te de indirgenemezdir.

(ii) $\varphi_{\sqrt{2}}(x^2-2) = (\sqrt{2})^2-2 = 2-2 = 0$ olduğundan $x^2-2 \in$ çek$(\varphi_{\sqrt{2}})$'dir.

(*) (iii) $\langle p(x)\rangle =$ çek$(\varphi_{\sqrt{2}})$ olsun. $x^2-2 \in$ çek $\varphi_{\sqrt{2}}$ olduğundan $p(x)\cdot q(x) = x^2-2$ olacak şekilde bir $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ vardır. Fakat x^2-2 indirgenemez olduğu için $p(x) \in \mathbb{Q}$ veya $q(x) \in \mathbb{Q}$'dur.

çek$(\varphi_{\sqrt{2}}) \neq \mathbb{Q}[x]$ olduğu için $p(x) \notin \mathbb{Q}$ olmalıdır. Öyleyse $0 \neq q(x) \in \mathbb{Q}$ dur. Bu da $q(x) \in U(\mathbb{Q}[x])$ olduğunu gösterir.

x^2-2 ile $p(x)$ bağdaşıktır. Öyleyse

$$\langle x^2-2\rangle = \langle p(x)\rangle = \text{çek}(\varphi_{\sqrt{2}})$$

dir.