MSGSÜ
Mat315
Final
10.08.2018
Süre: 60 dk.

İsim: ______________
No: ______________

Sınavda toplam 80 puanlık 6 soru var.

Soru	1	2	3	4	5	6	Toplam
Puan	15	15	10	15	15	10	80
Kazanılan							

1. (15 Puan) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının, $4\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$ idealini içeren tüm ideallerini yazınız.

$4\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$

$12\mathbb{Z}$'yi içeren idealler : $12\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}$

2. (15 Puan) $p(x) = x^2 + x + 4$ polinomunun

(a) $\mathbb{Z}$ halkasındaki köklerini (varsa) yazınız;

$\mathbb{Z}$'de kökü yok

(b) $\mathbb{Z}_5$ halkasındaki köklerini (varsa) yazınız;

2

(c) $\mathbb{Z}_6$ halkasındaki köklerini (varsa) yazınız.

1, 4

3. (10 Puan) Diyelim ki D bir tamlık bölgesi olsun. Gösterin ki, verilen $a, b \in D$ için $< a > = < b >$ olması için gerek ve yeter koşul, bir $u \in U(D)$ için $a = ub$ olmasıdır.

($\Rightarrow$:) $\langle a \rangle = \langle b \rangle \Rightarrow a \in \langle b \rangle, b \in \langle a \rangle \Rightarrow \exists u, v \in D$ öyle ki $a = bu, b = av \Rightarrow b = buv$
$\Rightarrow D$ tamlık bölgesi old. dan $uv = 1 \Rightarrow u \in U(D)$.

($\Leftarrow$:) Bir $u \in U(D)$ için $a = ub$ olsun. O zaman $a \in \langle b \rangle \Rightarrow \langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$ 1
Bununla birlikte $u \in U(D)$ olduğundan öyle bir $u' \in D$ var ki $uu' = u'u = 1$.
Bu nedenle $a = ub$ den, $au' = u'a = u'ub = b \Rightarrow b \in \langle a \rangle \Rightarrow \langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$ 2.
1 ve 2 den $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ elde edilir.

4. (15 Puan) Diyelim ki, R halkası birimli, değişmeli ve *sonlu bir halka* olsun. Gösterin ki, R'nin her asal ideali, aynı zamanda R'nin bir maksimal idealidir.

P, R'nin bir asal ideali olsun. O zaman R/P tamlık bölgesidir. R sonlu olduğundan R/P de sonludur. Her sonlu tamlık bölgesi cisim olduğundan da R/P cisimdir. Öyleyse P maksimal idealdir.

5. (15 Puan) $\varphi_0 : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ halka homomorfizması, her $f(x) \in \mathbb{Z}(x)$ için $\varphi_0(f(x)) = f(0)$ ile tanımlı *değer homomorfizması* olsun.

(a) çekφ_0'ı hesaplayın (**İpucu**: çekφ_0 bir temel idealdir; üretecini bulun).

$$\text{çek}\,\varphi_0 = \{ f(x) \in \mathbb{Z}[x] : \varphi_0(f(x)) = f(0) = 0 \} = \{ f(x) : \exists g(x) \in \mathbb{Z}[x],\ f(x) = x g(x) \} =$$
$$= \{ x g(x) : g(x) \in \mathbb{Z}[x] \} = \langle x \rangle$$

(b) $\varphi_0(\mathbb{Z}[x]) = \mathbb{Z}$ olduğunu gösterin.

Herhangi bir $a \in \mathbb{Z}$ verildiğinde $f(x) = a$ sabit polinomu için $\varphi_0(f(x)) = f(0) = a$ sağlanır. Bu da φ_0'ın $\mathbb{Z}[x]$'ten $\mathbb{Z}$ üzerine old. gösterir. Yani $\varphi_0(\mathbb{Z}[x]) = \mathbb{Z}$ dir.

(c) $< x > \trianglelefteq \mathbb{Z}[x]$ ideali maksimal ideal midir? Neden?

Hayır: çek $\varphi_0 = \langle x \rangle$ olduğundan 1. izomorfizma teoremine göre $\mathbb{Z}[x]/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$ dir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ cisim olmadığı için $\mathbb{Z}[x]/\langle x \rangle$ de cisim değildir. Bu da $\langle x \rangle \ntrianglelefteq \mathbb{Z}[x]$'in maksimal ideal olmadığı anlamına gelir.

6. (10 Puan) Gösterin ki $\sqrt[5]{6}$ rasyonel sayı değildir.

Diyelim ki $\sqrt[5]{6} = q \in \mathbb{Q}$ olsun. O zaman q, $f(x) = x^5 - 6 \in \mathbb{Q}[x]$'in bir kökü olur. Bu da $x-q$'nun x^5-6 polinomunun birinci dereceden bir çarpanı olduğunu gösterir. Fakat Eisenstein kriterine göre x^5-6, $\mathbb{Z}[x]$'te indirgenemezdir. Gauss lemmasına göre de $\mathbb{Q}[x]$'te indirgenemezdir. Bu nedenle $\mathbb{Q}[x]$'te x^5-6'nın birinci dereceden çarpanı yoktur. Çelişki!

BAŞARILAR