MSGSÜ
MAT316

1 Mart 2020

Çalışma Soruları

1. (a) Verilen bir a tamsayısının bir $b \neq 0$ tamsayısına bölünebilir olmasını ($b \mid a$) tanımlayınız.
   (b) Eğer $a \mid b$, $c \mid d$ ise, $ac \mid bd$;
   (c) Eğer $a \mid b$ ve $b \mid a$ ise, $a = \pm b$;
   (d) Eğer $a \mid b$ ve $b \neq 0$ ise $\mid a \mid \leq \mid b \mid$;
   (e) Eğer $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise, herhangi k ve l tamsayıları için, $a \mid k \cdot b + l \cdot c$;
   (f) Eğer $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise, $a \mid c$.

2. En az biri sıfırdan farklı a, b tamsayıları için, a ile b'nin en büyük ortak böleni ($ebob(a, b)$) kavramını tanımlayınız.

3. En az biri sıfırdan farklı a, b tamsayıları için,

   (a)
   $$ebob(a, b) = ax + by$$
   koşulunu sağlayan x, y tamsayılarının mevcut olduklarını gösteriniz.

   (b) Verilen c tamsayısı için
   $$ax + by = c$$
   denkleminin çözümünün mevcut olması için gerek ve yeter koşulun, $ebob(a, b) \mid c$ olduğunu gösteriniz.

   (c) Eğer $ebob(a, b) = d$ ise, gösteriniz ki $ebob(a/d, b/d) = 1$'dir.

4. $ebob(a, b) = 1$ olsun.

   (a) Gösteriniz ki $a \mid c$ ve $b \mid c$ ise, o zaman $ab \mid c$ dir. Eğer $gcd(a, b) \neq 1$ ise, bu iddianın doğru olmadığı bşr karşıt örnek bulunuz.

   (b) Gösteriniz ki, $a \mid bc$ ise, o zaman $a \mid c$ dir. Eğer $gcd(a, b) \neq 1$ ise, bu iddianın doğru olmadığı bşr karşıt örnek bulunuz.

5. Öklid algoritması kullanarak aşağıda verilen sayı ikililerinin en büyük ortak bölenlerini bulunuz.

   (a) $a = 143, b = 227$
   (b) $a = 12378, b = 3054$
   (c) $a = 1769, b = 2378$

6. Bir önceki her bir şıkta, Öklid algoritmasından yararlanarak $ax + by = ebob(a, b)$ denklemini sağlayan x ve y tamsayılarını bulunuz.

7. (a) $ca \equiv cb \pmod{m}$ olmasının $a \equiv b \pmod{m}$ olmasını gerektirmediğini bir örnek vererek gösteriniz.

   (b) Eğer $ca \equiv cb \pmod{m}$ ve $ebob(c, m) = d$ ise, o zaman $a \equiv b \pmod{m/d}$'dir. Gösteriniz.

8. Aşağıdakileri gösteriniz.

   (a) Her $a \in \mathbb{Z}$ için $a \equiv a \pmod{m}$

   (b) Eğer $a \equiv b \pmod{m}$ ise, $b \pmod{a} \pmod{m}$'dir.

   (c) Eğer $a \equiv b \pmod{m}$ ve $b \equiv c \pmod{m}$ ise, $a \pmod{c} \pmod{m}$'dir.

9. Aşağıdakileri gösteriniz.

   (a) Her $a \in \mathbb{Z}$ için, $a \in \overline{a}$'dır.

   (b) Eğer $b \in \overline{a}$ ise, o zaman $\overline{a} = \overline{b}$'dir.

   (c) Eğer $a \equiv b \pmod{m}$ ise, $\overline{a} = \overline{b}$'dir.

   (d) Eğer $\overline{a} \neq \overline{b}$ ise $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$'dir.

10. (a) Gösteriniz ki, $a \equiv b \pmod{m}$ olması için gerek ve yeter koşul, a ile b nin m ile bölümlerinden kalanların aynı olmasıdır.

    (b) Gösteriniz ki, $m > 1$ olmak üzere $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ kümesi, bir modülo m tam temsilciler kümesidir.

11. Gösteriniz ki,

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$$

kümesi, üzerinde tanımlı

$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b}$$
$$\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$

işlemleriyle birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır (birimli ve değişmeli halka özelliklerinden derste bahsetmiştik).

12. Aşağıdaki doğrusal kalandaşlık denklemlerini çözünüz

    (a) $25x \equiv 15 \pmod{29}$

    (b) $5x \equiv 2 \pmod{26}$

    (c) $6x \equiv 15 \pmod{21}$

(d) $36x \equiv 8 \pmod{102}$

(e) $34x \equiv 60 \pmod{98}$

(f) $140x \equiv 133 \pmod{301}$